Proper ContractionをBackward ShiftのPartとして表現するときの表現空間の構造について (正規作用素に関連した線型作用素)

吉野, 崇

数理解析研究所講究録
399巻 1980年 108-121

Proper contraction を backward shift の part として表現するときの表現空間の構造について

東北大 教養　吉野 崇

可付番無限次元ヒルベルト空間$\mathcal{H}$上の有界線形作用素の全体を$\mathcal{B}(\mathcal{H})$とする. 任意の作用素$A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$は, 片側シフトのadjointの部分のスカラー倍とユニタリ同値であることが知られている([3]). ここでは, 不変部分空間との関連上, 及び, 便宜上, $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$について次の諸条件の下で, その表現空間の構造を調べる. (i) $\|A\| < \frac{1}{\sqrt{2}}$ (ii) $\mathcal{H} = \vee\{A^{*n}x_0 ; n=0,1,2,\cdots\}$, $\|x_0\| = 1$ (iii) $\sigma_p(B) \cup \sigma_p(B^*) = \emptyset$ for all $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ such as $BA = AB$ and $B \neq \lambda I$. ここで$\sigma_p(B)$はBの point spectrum を表わす.

<u>補助定理 1</u>. $T = [\sum_{n=0}^{\infty} A^{*n}A^n]^{\frac{1}{2}} A [\sum_{n=0}^{\infty} A^{*n}A^n]^{-\frac{1}{2}}$とすると, (a) $\|T\| < 1$で (b) $A = (I - T^*T)^{\frac{1}{2}} T (I - T^*T)^{-\frac{1}{2}}$.

<u>証明</u>. (a) $\|\sum_{n=0}^{\infty} A^{*n}A^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|A^{*n}A^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|A\|^{2n} = \frac{1}{1-\|A\|^2} < 2$ より,

$I \leqq \sum_{n=0}^{\infty} A^{*n}A^{n} < 2I$ だから, $\|T\| \leqq \|[\sum_{n=0}^{\infty} A^{*n}A^{n}]^{1/2}\| \, \|A\| \, \|[\sum_{n=0}^{\infty} A^{*n}A^{n}]^{-1/2}\| < \sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 1 = 1$.

(b) $T^{*}T = [\sum_{n=0}^{\infty} A^{*n}A^{n}]^{-1/2} A^{*} [\sum_{n=0}^{\infty} A^{*n}A^{n}] A [\sum_{n=0}^{\infty} A^{*n}A^{n}]^{-1/2} = [\sum_{n=0}^{\infty} A^{*n}A^{n}]^{-1/2} [\sum_{n=0}^{\infty} A^{*n}A^{n} - I] [\sum_{n=0}^{\infty} A^{*n}A^{n}]^{-1/2}$

$= I - [\sum_{n=0}^{\infty} A^{*n}A^{n}]^{-1}$ だから $I - T^{*}T = [\sum_{n=0}^{\infty} A^{*n}A^{n}]^{-1}$ 従って $(I-T^{*}T)^{1/2} T (I-T^{*}T)^{-1/2} = A$.

補助定理 2. 補助定理 1 の T に対して, isometric transformation W of $\mathcal{H}$ into $H^{2}_{\mathcal{H}}$ が存在し $W\mathcal{H}$ は S^{*} で不変で $WT = S^{*}W$. ここで $H^{2}_{\mathcal{H}}$ は $\mathcal{H}$-valued ハーディ空間で S は $H^{2}_{\mathcal{H}}$ 上の片側シフトである ([3]).

証明. $x \in \mathcal{H}$ に対し $\hat{x}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} [(I-T^{*}T)^{1/2} T^{n} x] z^{n}$ とするとき, $Wx = \hat{x}(z)$ によって W を定義すれば, $\|Wx\|^{2} = \|\sum_{n=0}^{\infty} [(I-T^{*}T)^{1/2} T^{n} x] z^{n}\|^{2}$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \|(I-T^{*}T)^{1/2} T^{n} x\|^{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \langle (I-T^{*}T) T^{n} x, T^{n} x \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} [\|T^{n}x\|^{2} - \|T^{n+1}x\|^{2}]$

$= \|x\|^{2} - \lim_{n\to\infty} \|T^{n}x\|^{2} = \|x\|^{2}$ だから, W は isometric transformation of $\mathcal{H}$ into $H^{2}_{\mathcal{H}}$ で $WTx = \widehat{Tx}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} [(I-T^{*}T)^{1/2} T^{n+1} x] z^{n} = S^{*}\hat{x}(z) = S^{*}Wx$ だから, $W\mathcal{H}$ は S^{*} で不変で $WT = S^{*}W$ である.

$0 \neq x \in \mathcal{H}$ に対して, E_{x} を projection of $H^{2}_{\mathcal{H}}$ onto $\vee\{x z^{n};\ n=0,1,2,\cdots\} = [H^{2}]x$ とすれば, E_{x} は S と可換で, 次を得る.

補助定理 3. $E_{x}W\mathcal{H}$ 及びその closure $\widetilde{E_{x}W\mathcal{H}}$ は $\phi(S)^{*}$, $\phi(z) \in H^{\infty}$ で不変である.

証明. $\phi(S)^* E_x W\mathcal{H} = E_x \phi(S)^* W\mathcal{H} \subset E_x W\mathcal{H} \subset E_x\widetilde{W\mathcal{H}}$ よって $\phi(S)^* E_x\widetilde{W\mathcal{H}} \subset E_x\widetilde{W\mathcal{H}}$.

補助定理 4. $E_x W\mathcal{H} \neq \{0\}$.

証明. $\| E_x W(I-T^*T)^{-1/2} x \|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \| E_x (I-T^*T)^{1/2} T^n (I-T^*T)^{-1/2} x \|^2$

$= \|x\|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \| E_x (I-T^*T)^{1/2} T^n (I-T^*T)^{-1/2} x \|^2 \geq \|x\|^2 \neq 0$.

補助定理 5. $E_x\widetilde{W\mathcal{H}} \subsetneqq [H^2]x$ で $\dim E_x\widetilde{W\mathcal{H}} > 1$ とすると, $\{0\} \subsetneqq \mathcal{M} \subsetneqq E_x\widetilde{W\mathcal{H}}$ で $\mathcal{M} \cap E_x W\mathcal{H} \neq \{0\}$ であるような S^* の closed な不変部分空間 $\mathcal{M}$ が存在する.

証明. 補助定理 3 により $E_x\widetilde{W\mathcal{H}}$ は S^* で不変であり, 仮定から $\dim E_x\widetilde{W\mathcal{H}} > 1$ だから, [1; Theorem 16] 又は [3; Corollary 3.16] によって, $\{0\} \subsetneqq \mathcal{M} \subsetneqq E_x\widetilde{W\mathcal{H}}$ であるような S^* の closed な不変部分空間 $\mathcal{M}$ が存在する. simply invariant subspace の構造についてのよく知られている結果によって, inner functions $\phi_1(z)$, $\phi_2(z)$ が存在して, $[H^2]x \ominus E_x\widetilde{W\mathcal{H}} = \phi_1(S)[H^2]x$, $[H^2]x \ominus \mathcal{M} = \phi_2(S)[H^2]x$ と表わすことが出来る($\because E_x\widetilde{W\mathcal{H}} \subsetneqq [H^2]x$ だから). 従って $\phi_1(z) = \phi_2(z)\phi_3(z)$ for some inner function $\phi_3(z)$ である. 故に, $\mathcal{M} = \{f(z)x\,;\ f(z) \in H^2,\ \phi_2(S)^* f(z) = 0\}$ で, $E_x\widetilde{W\mathcal{H}} = \{f(z)x : f(z) \in H^2,\ \phi_2(S)^*\phi_3(S)^* f(z) = 0\}$

$$= \phi_3(S)\mathcal{M} \oplus \{f(z)x\,;\ f(z) \in H^2,\ \phi_3(S)^* f(z) = 0\}.$$

従って, $0 \neq g(z)x \in E_x W\mathcal{H}$, $g(z) \in H^2$ に対して, $g(z) = g_1(z) \oplus g_2(z)$, $g_1(z)x \in \phi_3(S)\mathcal{M}$ and $g_2(z)x \in \{f(z)x\,;\, f(z)\in H^2,\ \phi_3(S)^* f(z) = 0\}$ と表わせる. もし $g_1(z)=0$ ならば, $\mathcal{M}$ の代りに $\{f(z)x\,;\, f(z)\in H^2,\ \phi_3(S)^* f(z) = 0\}$ をとれば証明は終るから $g_1(z)\neq 0$ としてよい. 従って, この時 $\phi_3(S)^* g(z) = \phi_3(S)^* g_1(z) \in \mathcal{M}$ だから, 補助定理3によって,
$0 \neq \phi_3(S)^* g(z) \in \mathcal{M}\cap E_x W\mathcal{H}$.

<u>定理1</u>. 或る non-zero $x\in\mathcal{H}$ に対して $E_x W\mathcal{H} = [H^2]x$ 又は, $\widetilde{E_x W\mathcal{H}} \subsetneqq [H^2]x$ ならば, A は non-trivial closed invariant subspace を持つ.

<u>証明</u>. 補助定理1及び2によって, $S^*/W\mathcal{H}$ が non-trivial closed invariant subspace を持つことを示せばよい. $\dim \widetilde{E_x W\mathcal{H}} > 1$ ならば, 補助定理5によって, いづれの場合にも,
$\{0\}\subsetneqq \mathcal{M} \subsetneqq \widetilde{E_xW\mathcal{H}}$ 且つ $\mathcal{M}\cap E_xW\mathcal{H}\neq\{0\}$ なる S^* の closed な不変部分空間 $\mathcal{M}$ が存在するから. $0\neq g(z)\in\mathcal{M}\cap E_xW\mathcal{H}$ に対して, $\hat{u}(z)$ を $E_x\hat{u}(z) = g(z)$ なる $W\mathcal{H}$ の vector とするとき, $\mathfrak{m} = \vee\{S^{*n}\hat{u}(z)\,;\, n=0,1,2,\cdots\}$ を作れば, $\mathfrak{m}$ は明らかに S^* で不変で補助定理2によって $\{0\}\subsetneqq \mathfrak{m}\subset W\mathcal{H}$ である. $\phi(z)\in H^\infty$ に対して $E_x\phi(S)^*\hat{u}(z) = \phi(S)^*E_x\hat{u}(z)$ $= \phi(S)^*g(z)\in\mathcal{M}$ だから, $\{0\}\subsetneqq E_x\mathfrak{m}\subset\mathcal{M}$ 従って, $\{0\}\subsetneqq\widetilde{E_x\mathfrak{m}}\subset\mathcal{M}\subsetneqq\widetilde{E_xW\mathcal{H}}$ よって $\{0\}\subsetneqq\mathfrak{m}\subsetneqq W\mathcal{H}$. 故に $\mathfrak{m}$ は求める $S^*/W\mathcal{H}$ の不変部分空間で

ある。補助定理4により，最後に dim $\widetilde{E_x W\mathcal{H}} = 1$ としてよい。
この場合 $E_x \hat{u}(z) = 0$ なる $0 \neq \hat{u}(z) \in W\mathcal{H}$ が存在するから，
$\mathfrak{M} = \vee\{S^{*n}\hat{u}(z);\ n=0,1,2,\cdots\}$ とすれば，$\mathfrak{M}$ は明らかに S^* で不変で
補助定理2により $\{0\} \subsetneqq \mathfrak{M} \subset \widetilde{W\mathcal{H}}$. 又 $\phi(z)\in H^\infty$ に対して，$E_x\phi(S)^*\hat{u}(z)$
$= \phi(S)^* E_x \hat{u}(z) = 0$ だから，$E_x\mathfrak{M} = \{0\}$ よって $\mathfrak{M} \subsetneqq \widetilde{W\mathcal{H}}$ 何故なら
補助定理4より $E_x W\mathcal{H} \neq \{0\}$ だから。故に $\mathfrak{M}$ は求める $S^*/\widetilde{W\mathcal{H}}$ の
不変部分空間である。

註1. $E_xW\mathcal{H} = [H^2]x$ ならば，x は A^* の cyclic vector ではない。
実際，$E_xW\mathcal{H} = [H^2]x$ ならば，$E_xWy = x$ なる $0\neq y\in\mathcal{H}$ が存在する。
この時 $E_x(I-T^*T)^{1/2}y = x$ で $E_x(I-T^*T)^{1/2}T^n y = 0$ for all $n=1,2,\cdots$
だから，$\langle (I-T^*T)^{1/2}Ty,\ A^{*n}x\rangle = \langle (I-T^*T)^{1/2}T^{n+1}y,\ x\rangle = \langle E_x(I-T^*T)^{1/2}T^{n+1}y,\ x\rangle$
$= 0$ for all $n=0,1,2,\cdots$. 又，A の仮定(iii)より $(I-T^*T)^{1/2}Ty$
$= A(I-T^*T)^{1/2}y \neq 0$ だから，$\vee\{A^{*n}x;\ n=0,1,2,\cdots\} \subsetneqq \mathcal{H}$.

註2. 次は同値である。

(a) 或る $0\neq x\in\mathcal{H}$ に対して $\widetilde{E_xW\mathcal{H}} \subsetneqq [H^2]x$

(b) $A^*\in$ the class C_0 defined by Sz.-Nagy and C. Foias [2].

(c) $\widetilde{E_xW\mathcal{H}} \subsetneqq [H^2]x$ for all non-zero $x\in\mathcal{H}$.

実際，$\widetilde{E_xW\mathcal{H}} \subsetneqq [H^2]x$ for some non-zero $x\in\mathcal{H}$ ならば，補助定理4より $\widetilde{E_xW\mathcal{H}} \supsetneqq \{0\}$ だから，或る inner function $q(z)=\sum_{n=0}^{\infty} q_n z^n$ が

存在して，$[H^2]x \ominus \widetilde{E_x W\mathcal{H}} = q(S)[H^2]x$ と表わすことができる．

従って，$\langle q(S)x, W\mathcal{H}\rangle = \langle q(S)x, E_x W\mathcal{H}\rangle = 0$．この時，任意の $y \in \mathcal{H}$ に対して，$\langle q(T^*)(I-T^*T)^{1/2}x, y\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle q_n x, (I-T^*T)^{1/2}T^n y\rangle$ $= \langle q(S)x, \hat{y}(z)\rangle = 0$ 従って，補助定理1により，$(I-T^*T)^{1/2} q(A^*)x$ $= q(T^*)(I-T^*T)^{1/2}x = 0$．A に対する仮定(iii)より，$q(A^*) = 0$ でなければならない．故に $A^* \in$ the class C_0．次に $A^* \in$ the class C_0 ならば，inner function $q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n z^n$ が存在して $q(A^*) = 0$ である．この時，補助定理1により，$q(T^*)(I-T^*T)^{1/2}x = (I-T^*T)^{1/2}q(A^*)x = 0$ for all non-zero $x \in \mathcal{H}$．よって，$\langle q(S)x, \hat{y}(z)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle q_n x, (I-T^*T)^{1/2}T^n y\rangle$ $= \langle q(T^*)(I-T^*T)^{1/2}x, y\rangle = 0$ for all $y \in \mathcal{H}$．従って，$\langle q(S)x, E_x W\mathcal{H}\rangle = \langle q(S)x, W\mathcal{H}\rangle = 0$．故に，$\widetilde{E_x W\mathcal{H}} \subsetneqq [H^2]x$ for all non-zero $x \in \mathcal{H}$．

<u>定理2</u>．任意の $0 \neq x \in \mathcal{H}$ に対して，$\widetilde{E_x W\mathcal{H}} = [H^2]x$ である．

<u>証明</u>．或る $0 \neq x \in \mathcal{H}$ に対して，$\widetilde{E_x W\mathcal{H}} \subsetneqq [H^2]x$ ならば，註2により $A^* \in$ the class C_0．従って，或る inner function $q(z)$ が存在して $q(A^*) = 0$．$q(z)$ は $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ で analytic で，仮定(i)より $\sigma(A^*) \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ だから，spectral mapping theorem により $q(\sigma(A^*)) = \sigma(q(A^*)) = \{0\}$．従って $\sigma(A^*)$ は $q(z)$ の zero point の集合に含まれる．$q(z)$ は inner だから，non-zero よって $\sigma(A^*)$ は

有限個である．故に $g(A^*) = g_1(A^*)\,g_2(A^*)$，$g_1(A^*)$ は A^* の多項式，$g_2(A^*)$ は invertible と分解できる．これは A の仮定(iii)に反す．

次に，$W\mathcal{H}$ の orthogonal complement in $H^2_{\mathcal{H}}$ を調べる．

<u>補助定理 6</u>．任意の $y \in \mathcal{H}$ に対して，$-A^*y + yz \in H^2_{\mathcal{H}} \ominus W\mathcal{H}$．

<u>証明</u>．補助定理 1 によって，任意の $\hat{x}(z) \in W\mathcal{H}$ に対して，

$\langle -A^*y + yz,\ \hat{x}(z)\rangle = \langle -A^*y,\ (I-T^*T)^{1/2}x\rangle + \langle y,\ (I-T^*T)^{1/2}Tx\rangle$

$= -\langle T^*(I-T^*T)^{1/2}y,\ x\rangle + \langle y,\ (I-T^*T)^{1/2}Tx\rangle = 0$．

<u>定理 3</u>．$H^2_{\mathcal{H}} \ominus W\mathcal{H} = \vee\{z^m[-A^{*n+1}x_0 + A^{*n}x_0 z]\,;\ m, n = 0, 1, 2, \cdots\}$．

<u>証明</u>．補助定理 6 より $\vee\{z^m[-A^{*n+1}x_0 + A^{*n}x_0 z]\,;\ m, n = 0, 1, 2, \cdots\} \subset H^2_{\mathcal{H}} \ominus W\mathcal{H}$ だから，$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^n \in [H^2_{\mathcal{H}} \ominus W\mathcal{H}] \ominus \vee\{z^m[-A^{*n+1}x_0 + A^{*n}x_0 z]\,;\ m, n = 0, 1, 2, \cdots\}$ とすると，任意の $\hat{x}(z) \in W\mathcal{H}$ に対して，$0 = \langle g(z),\ \hat{x}(z)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\langle g_n,\ (I-T^*T)^{1/2}T^n x\rangle$

$= \langle \sum_{n=0}^{\infty} T^{*n}(I-T^*T)^{1/2}g_n,\ x\rangle$ よって $\sum_{n=0}^{\infty} T^{*n}(I-T^*T)^{1/2}g_n = 0$．$g(z)$ は又，$\vee\{z^m[-A^{*n+1}x_0 + A^{*n}x_0 z]\,;\ m, n = 0, 1, 2, \cdots\}$ とも直交しているから，各 $m, n = 0, 1, 2, \cdots$ に対して，$0 = \langle g(z),\ z^m[-A^{*n+1}x_0 + A^{*n}x_0 z]\rangle$

$= \langle g_m,\ -A^{*n+1}x_0\rangle + \langle g_{m+1},\ A^{*n}x_0\rangle = \langle -Ag_m + g_{m+1},\ A^{*n}x_0\rangle$．よって，

$g_{m+1} = Ag_m = A^2 g_{m-1} = \cdots = A^{m+1}g_0$ （$\because$ x_0 は A^* の cyclic vector）．

故に、$0=\sum_{n=0}^{\infty} T^{*n}(I-T^*T)^{1/2} g_n = \sum_{n=0}^{\infty} T^{*n}(I-T^*T)^{1/2} A^n g_0 = \sum_{n=0}^{\infty} T^{*n}(I-T^*T)\, T^n (I-T^*T)^{-1/2} g_0$

$= \sum_{n=0}^{\infty}(T^{*n}T^n - T^{*n+1}T^{n+1})(I-T^*T)^{-1/2} g_0 = (I-T^*T)^{-1/2} g_0 - \lim_{n\to\infty}(T^{*n}T^n)(I-T^*T)^{-1/2} g_0 = (I-T^*T)^{-1/2} g_0.$

よって $g_0=0$ 従って、$g_m=0$, $m=1,2,\cdots$. 故に $g(z)=0$ である。

A に対する仮定(iii) より $\sigma_p(A^*)=\phi$ だから、$\{A^{*n}x_0\,;\, n=0,1,2,\cdots\}$ は 1 次独立。従って、$x_n = \dfrac{A^{*n}x_0 - \sum_{k=0}^{n-1}\langle A^{*n}x_0, x_k\rangle x_k}{\|A^{*n}x_0 - \sum_{k=0}^{n-1}\langle A^{*n}x_0, x_k\rangle x_k\|}$, $n=1,2,\cdots$ とすれば、$\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ は $\mathcal{H}$ の完備な正規直交基になる。(条件(i)により)

<u>補助定理 7</u>. 上で定義した x_n, $n=1,2,\cdots$ に対して、

$p_n(z)\,x_0 + x_n \in H^2_{\mathcal{H}} \ominus W\mathcal{H}$ 但し、$p_1(z) = \dfrac{\langle A^*x_0, x_0\rangle - z}{\|A^*x_0 - \langle A^*x_0, x_0\rangle x_0\|}$,

$p_n(z) = \dfrac{(-1)^n z^n + \langle A^{*n}x_0, x_0\rangle - \sum_{k=1}^{n-1}\langle A^{*n}x_0, x_k\rangle p_k(z)}{\|A^{*n}x_0 - \sum_{k=0}^{n-1}\langle A^{*n}x_0, x_k\rangle x_k\|}$, $n=2,3,\cdots$ である。

<u>証明</u>. $x_1 = \dfrac{A^*x_0 - \langle A^*x_0, x_0\rangle x_0}{\|A^*x_0 - \langle A^*x_0, x_0\rangle x_0\|} = \dfrac{-(-A^*x_0 + x_0 z) - (\langle A^*x_0, x_0\rangle - z)x_0}{\|A^*x_0 - \langle A^*x_0, x_0\rangle x_0\|}$

であり、補助定理 6 より $-A^*x_0 + x_0 z \in H^2_{\mathcal{H}} \ominus W\mathcal{H}$ だから、

$\dfrac{\langle A^*x_0, x_0\rangle - z}{\|A^*x_0 - \langle A^*x_0, x_0\rangle x_0\|}\, x_0 + x_1 \in H^2_{\mathcal{H}} \ominus W\mathcal{H}$ である。

次に、$p_j(z)\,x_0 + x_j \in H^2_{\mathcal{H}} \ominus W\mathcal{H}$, $j=1,2,\cdots,n-1$ と仮定すると、

$$x_n = \frac{A^{*n}x_0 - \sum_{k=0}^{n-1}\langle A^{*n}x_0, x_k\rangle x_k}{\|A^{*n}x_0 - \sum_{k=0}^{n-1}\langle A^{*n}x_0, x_k\rangle x_k\|}$$

$$= \frac{\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n+k}(-A^{*k+1}x_0 + A^{*k}x_0 z) z^{n-1+k} - (-1)^n x_0 z^n - \sum_{k=1}^{n-1}\langle A^{*n}x_0, x_k\rangle (p_k(z)x_0 + x_k) - \langle A^{*n}x_0, x_0\rangle x_0 + \sum_{k=1}^{n-1}\langle A^{*n}x_0, x_k\rangle p_k(z) x_0}{\|A^{*n}x_0 - \sum_{k=0}^{n-1}\langle A^{*m}x_0, x_k\rangle x_k\|}$$

だから，補助定理6によって，

$$\frac{(-1)^n z^n + \langle A^{*n}x_0,\ x_0\rangle - \sum_{k=1}^{n-1}\langle A^{*n}x_0,\ x_k\rangle p_k(z)}{\| A^{*n}x_0 - \sum_{k=0}^{n-1}\langle A^{*n}x_0,\ x_k\rangle x_k \|}\, x_0 + x_n \in H^2_{\mathcal{H}} \ominus W\mathcal{H} \quad \text{である.}$$

従って，帰納法により結論を得る．

<u>定理4</u>. 補助定理7の多項式 $p_n(z)$ に対して，

$$H^2_{\mathcal{H}} \ominus W\mathcal{H} = \vee\{ z^m[p_n(z)x_0 + x_n] ;\ m=0,1,2,\cdots,\ n=1,2,\cdots \}.$$

<u>証明</u>. 補助定理7の証明からわかるように，$-(-A^*x_0 + x_0 z)$
$= \| A^*x_0 - \langle A^*x_0, x_0\rangle x_0 \| (p_1(z)x_0 + x_1)$ であり，$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-k}(-A^{*k+1}x_0 + A^{*k}x_0 z)z^{n-1-k}$
$= \sum_{k=1}^{n-1}\langle A^{*n}x_0, x_k\rangle (p_k(z)x_0 + x_k) + \| A^{*n}x_0 - \sum_{k=0}^{n-1}\langle A^{*n}x_0, x_k\rangle x_k \| (p_n(z)x_0 + x_n)$, $n=2,3,\cdots$
だから，$-A^{*k+1}x_0 + A^{*k}x_0 z \in \vee\{ z^m[p_n(z)x_0 + x_n] ; m=0,1,2,\cdots, n=1,2,\cdots \}$,
$k=0,1,2,\cdots$. 故に，定理3によって，
$H^2_{\mathcal{H}} \ominus W\mathcal{H} \subset \vee\{ z^m[p_n(z)x_0 + x_n] ;\ m=0,1,2,\cdots,\ n=1,2,\cdots \}$.
逆向きの包含は補助定理7より明らか．

<u>系</u>. $(I-E_{x_0})\,\overline{[H^2_{\mathcal{H}} \ominus W\mathcal{H}]} = H^2_{(I-E_{x_0})\mathcal{H}}$.

<u>証明</u>. 任意の $f(z)\in H^2$ 及び各 $n=1,2,\cdots$ に対して，定理4により，$p_n(z)f(z)x_0 + f(z)x_n = f(z)[p_n(z)x_0 + x_n] \in H^2_{\mathcal{H}} \ominus W\mathcal{H}$ だから，$f(z)x_n \in (I-E_{x_0})[H^2_{\mathcal{H}} \ominus W\mathcal{H}]$ よって，$[H^2]x_n \subset (I-E_{x_0})[H^2_{\mathcal{H}} \ominus W\mathcal{H}]$,

for all $n=1,2,\cdots$ である. 故に $\bigoplus_{k=1}^{n}[H^2]x_k \subset (I-E_{x_0})[H^2_{\mathcal H}\ominus W\mathcal H]$.
よって $H^2_{(I-E_{x_0})\mathcal H} \subset \overline{(I-E_{x_0})[H^2_{\mathcal H}\ominus W\mathcal H]}$. 逆向きの包含は明らか.

__補助定理 8__. $H^2_{\mathcal H}\ominus W\mathcal H \subset M$ なる S の closed invariant subspace M に対して, $M\cap[H^2]x_0 \neq \{0\}$ ならば, $M = H^2_{\mathcal H}$ である.

__証明__. 或る non-zero $f(z)\in H^2$ に対して $f(z)x_0 \in M$ ならば, $f(z)=q(z)m(z)$, $q(z)$ は inner か又は絶対値 1 のスカラーで, $m(z)$ は outer function に分解出来るから, $q(z)x_0\in M$ である. 補助定理 7 により, $p_n(z)x_0 + x_n \in H^2_{\mathcal H}\ominus W\mathcal H \subset M$ だから, $q(z)x_n \in M$ を得る. 従って, $q(z)H^2_{\mathcal H}\subset M$ である. もし $q(z)$ が inner ならば, 任意の $\hat{x}(z)\in H^2_{\mathcal H}\ominus M \subset W\mathcal H$ に対して $q(S)^*\hat{x}(z)=0$ となり, 任意の $\hat{x}(z)\in W\mathcal H$ に対して $q(S)^*\hat{x}(z)=0$ とすると $\langle q(z)x, E_xW\mathcal H\rangle = \langle q(z)x, W\mathcal H\rangle = 0$ for all $x\in\mathcal H$ でこれは定理 2 と矛盾するから, $0\in\sigma_p(\,q(S)^*|W\mathcal H\,)$ である. 従って, 補助定理 1 及び 2 によって $0\in\sigma_p(\bar{q}(A))$, ここで $\bar{q}(z)=\overline{q(\bar{z})}$, となり, これは A に対する仮定 (iii) に反する. 故に $q(z)$ は絶対値 1 のスカラーでなければならない. 故に $H^2_{\mathcal H}\subset M$.

__定理 5__. $(I-E_{x_0})[H^2_{\mathcal H}\ominus W\mathcal H]$ が closed ならば, A は non-trivial closed invariant subspace を持たない.

証明. 補助定理1及び2によって, $H^2_{\mathcal{H}} \ominus W\mathcal{H} \subsetneqq M \subsetneqq H^2_{\mathcal{H}}$ なる与の closed invariant subspace M が存在しないことを示せばよい. 系によって $(I-E_{x_0})[H^2_{\mathcal{H}} \ominus W\mathcal{H}] = H^2_{(I-E_{x_0})\mathcal{H}}$ となるから, もし, $H^2_{\mathcal{H}} \ominus W\mathcal{H} \subsetneqq M \subsetneqq H^2_{\mathcal{H}}$ なる与の closed invariant subspace M が存在したとすれば, non-zero $w(z) = f_0(z)x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)x_n \in M \ominus [H^2_{\mathcal{H}} \ominus W\mathcal{H}]$, $f_0(z), f_n(z) \in H^2, n=1,2,\cdots$ に対して, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)x_n \in H^2_{(I-E_{x_0})\mathcal{H}}$ よって, 或る $h(z) \in H^2$ が存在して, $h(z)x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)x_n \in H^2_{\mathcal{H}} \ominus W\mathcal{H}$ である. 従って, $0 \neq \{f_0(z) - h(z)\}x_0 = w(z) - \{h(z)x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)x_n\} \in M$ よって補助定理8により, $M = H^2_{\mathcal{H}}$ となり矛盾する.

残念なことには, 次の結果が得られる.

定理6. $(I-E_{x_0})[H^2_{\mathcal{H}} \ominus W\mathcal{H}]$ は closed ではない.

証明. A に対する条件(i)により, $A^* + \alpha I$ が invertible になるように $|\alpha| < 1$ なる α をえらぶことができる. 従って, 補助定理6によって, $(-A^* + zI)(A^* + \alpha I)^{-1} x_0 \in H^2_{\mathcal{H}} \ominus W\mathcal{H}$ である.

$(-A^* + zI)(A^* + \alpha I)^{-1} x_0 = (-A^* - \alpha I + \alpha I + zI)(A^* + \alpha I)^{-1} x_0$

$= -x_0 + (z+\alpha)(A^* + \alpha I)^{-1} x_0$

$= [-1 + (z+\alpha)\langle (A^*+\alpha I)^{-1} x_0, x_0\rangle] x_0 + (z+\alpha)[(A^*+\alpha I)^{-1} x_0 - \langle (A^*+\alpha I)^{-1} x_0, x_0\rangle x_0]$ で

$\langle [(A^*+\alpha I)^{-1} x_0 - \langle (A^*+\alpha I)^{-1} x_0, x_0\rangle x_0], x_0 \rangle = 0$ だから,

$u_\alpha = (A^*+\alpha I)^{-1}x_0 - \langle (A^*+\alpha I)^{-1}x_0, x_0\rangle x_0 \in H^2_{(I-E_{x_0})\mathcal{H}}$ で、

$(z+\alpha)u_\alpha \in (I-E_{x_0})[H^2_{\mathcal{H}} \ominus W\mathcal{H}]$ である。 もし、或る $f(z) \in H^2$ に対して、 $f(z)x_0 + u_\alpha \in H^2_{\mathcal{H}} \ominus W\mathcal{H}$ ならば、

$[(z+\alpha)f(z) - \{-1+(z+\alpha)\langle (A^*+\alpha I)^{-1}x_0, x_0\rangle\}]x_0 \in H^2_{\mathcal{H}} \ominus W\mathcal{H}$ となり、

$(z+\alpha)f(z) = -1 + (z+\alpha)\langle (A^*+\alpha I)^{-1}x_0, x_0\rangle$ である。何故ならば、定理2により $\widetilde{E_{x_0}W\mathcal{H}} = [H^2]x_0$ だから。 しかし、上の等式は $z = -\alpha$ とおいてみればわかるように成立しない。故に、

$u_\alpha \notin (I-E_{x_0})[H^2_{\mathcal{H}} \ominus W\mathcal{H}]$ である。 従って、系より、$(I-E_{x_0})[H^2_{\mathcal{H}} \ominus W\mathcal{H}]$ は closed ではない。

<u>定理7</u>. A が、non-trivial closed invariant subspace を持つ為の必要十分条件は、或る non-zero vectors x 及び y が $\mathcal{H}$ に存在して、 $E_x W y = 0$ なることである。

<u>証明</u>. $E_x Wy = \sum_{k=0}^{\infty} [E_x(I-T^*T)^{1/2}T^k y]z^k$ であり、補助定理1により、$(I-T^*T)^{1/2}T^k y = A^k(I-T^*T)^{1/2}y$ だから、或る non-zero x 及び y に対して $E_x Wy = 0$ なることと、$\langle (I-T^*T)^{1/2}y, A^{*k}x\rangle$
$= \langle (I-T^*T)^{1/2}T^k y, x\rangle = \langle E_x(I-T^*T)^{1/2}T^k y, x\rangle = 0$, for all $k = 0, 1, 2, \dots$

なることは同値である。又、これは、x が A^* の cyclic vector ではないことと同値である。

H^2 上の the simple unilateral shift S_0 に対して，$\mathfrak{M}_0$ を S_0^* の凡ての cyclic vectors の全体とすると，次の結果を得る．

定理 8．$[\mathfrak{M}_0 \cup \{0\}]x$ が $E_x W \mathcal{H}$ を含まないような non-zero $x \in \mathcal{H}$ が存在すれば，A は non-trivial closed invariant subspace を持つ．

証明．仮定より，$f(z)x \in E_x W \mathcal{H}$ なる $0 \neq f(z) \notin \mathfrak{M}_0$ が存在する．従って，$\vee\{S_0^{*k} f(z)\ ;\ k=0,1,2,\cdots\}$ は S_0^* の non-trivial closed invariant subspace である．よって，或る inner function $q(z)$ が存在して，$H^2 \ominus \vee\{S_0^{*k} f(z)\ ;\ k=0,1,2,\cdots\} = q(z)H^2$ と表わせるから，$q(S_0)^* f(z) = 0$．又，$f(z)x \in E_x W\mathcal{H}$ で $f(z) \neq 0$ だから，$E_x \hat{u}(z) = f(z)x$ なる non-zero な $\hat{u}(z) \in W\mathcal{H}$ が存在する．従って，$E_x\, q(S)^* \hat{u}(z) = q(S)^* E_x \hat{u}(z) = q(S)^* f(z) x = [q(S_0)^* f(z)]x = 0$．故に，もし，$q(S)^* \hat{u}(z) \neq 0$ ならば，補助定理 2 によって $q(S)^* \hat{u}(z) \in W\mathcal{H}$ だから，定理 7 によって，A は，non-trivial closed invariant subspace を持つ．定理 2，註 2 及び，A に対する条件 (iii) によって，$q(S)^* \hat{u}(z) \neq 0$ である．何故ならば，補助定理 1 及び 2 によって，$q(S)^* W = W q(T^*)^* = W(I - T^*T)^{-\frac{1}{2}} q(A^*)^* (I - T^*T)^{\frac{1}{2}}$ だから．

定理 8 より，A の不変部分空間との関連に於て，$\mathfrak{M}_0$ の構造を調べることは，非常に意味のあることであろう．証明は省

略するが、$\mathfrak{M}_0 \cup \{0\}$ は、$\phi(S_0)^*$, $\phi(z) \in H^\infty$ で不変な, dense set in H^2 で, linear manifold ではないが, S_0^*で不変な linear manifold $\mathfrak{N} \neq \{0\}$ を含んでいる。そしてこのとき $\mathfrak{N} \subsetneqq \widetilde{\mathfrak{N}} = H^2$ 等が示される。

文　献

[1] H. Helson, Lectures on invariant subspaces,
Academic press 1964.

[2] B. Sz.-Nagy and C. Foiaş, Analyse harmonique des opèrateurs de l'espace de Hilbert,
Acadèmiai Kiadó 1967.

[3] H. Radjavi and P. Rosenthal, Invariant subspaces,
Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete,
Band 77 1973.